Intégrales doubles

Calculs d'intégrales doubles

Exercice 1 [01947] [Correction]
Calculer
$$I = \iint_{\mathcal{D}} xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$
avec
$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geqslant 0 \text{ et } x + y \leqslant 1\right\}$$

Exercice 2 [01949] [Correction]
Calculer
$$I = \iint_{\mathcal{D}} x^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$
où $\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant 1, y \geqslant 0 \text{ et } y^2 \leqslant x\right\}$.

Exercice 3 [01950] [Correction]
Calculer
$$\iint_{\mathcal{D}} x^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$
où $\mathcal{D}$ est l'intérieur de l'ellipse d'équation
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Exercice 4 [03373] [Correction]
a) Donner les coordonnées des foyers F et F' de l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
(avec $0 < b < a$)
b) Calculer
$$I = \iint_{D} (MF + MF') \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$
où D désigne l'intérieur de l'ellipse

Exercice 5 [03746] [Correction]
Calculer
$$I = \iint_{\mathcal{D}} \frac{\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y}{(1 + x^2)(1 + y^2)}$$
avec $\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1\right\}$.

Exercice 6 [00085] [Correction]
Calculer
$$I = \iint_{\mathcal{D}} \sin(x + y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$
où $\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geqslant 0 \text{ et } x + y \leqslant \pi\right\}$.

Exercice 7 [00086] [Correction]
Calculer
$$I = \iint_{\mathcal{D}} yx^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$
où $\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant 1, y \geqslant 0 \text{ et } y^2 \leqslant x\right\}$.

Exercice 8 [00096] [Correction]
Calculer
$$\iint_{\Delta} (x^3 - 2y) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$
avec
$$\Delta = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geqslant 0, y \geqslant 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$$
On pourra utiliser le changement de variable $x = au\cos\theta$ et $y = bu\sin\theta$.

Exercice 9 [02914] [Correction]
Soit
$$I_n = \iint_{[0,1]^2} \frac{\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y}{1 + x^n + y^n}$$
Déterminer la limite de I_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 10 [03365] [Correction]
Calculer
$$\iiint_D (x+y+z)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
où
$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x+y+z \leqslant 1\right\}$$

Exercice 11 [03815] [Correction]
Calculer
$$\iint_D (xy+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
où
$$D = \left\{(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 / y + x - 1 \leqslant 0\right\}$$

Exercice 12 [02564] [Correction]
Dessiner
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geqslant 0, 1 \leqslant xy \leqslant 2, 1 \leqslant x^2 - y^2 \leqslant 4\right\}$$
Montrer que $\phi(x,y) = (xy, x^2 - y^2)$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme sur $]0,+\infty[^2$.
Expliciter $\phi(D)$.
Calculer
$$I = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \text{ où } f(x,y) = \frac{xy(x^2+y^2)}{x^2-y^2}$$
Etudier les extrema de f.

Calculs d'intégrales doubles en coordonnées polaires

Exercice 13 [01951] [Correction]
Calculer
$$I = \iint_{\mathcal{D}} \cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
où $\mathcal{D}$ est le disque de centre O et de rayon R.

Exercice 14 [01952] [Correction]
Calculer
$$\iint_{\mathcal{D}} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
où $\mathcal{D}$ désigne le disque de centre O et de rayon $\sqrt{\pi}$.

Exercice 15 [01953] [Correction]
Calculer
$$I = \iint_{\mathcal{D}} \frac{x^2+y^2}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
où $\mathcal{D}$ est le quart de disque unité inclus dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Exercice 16 [01954] [Correction]
Calculer
$$\iint_{\mathcal{D}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
où $\mathcal{D}$ désigne le domaine borné délimité par la cardioïde d'équation polaire $\rho = 1 + \cos\theta$.

Exercice 17 [01957] [Correction]
Calculer
$$\iint_{\mathcal{D}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
où $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - x \leqslant 0\right\}$.

Exercice 18 [03396] [Correction]
Calculer
$$I = \iint_D (1+xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
où D désigne le disque fermé de centre O et de rayon 1.

Exercice 19 [00089] [Correction]
Calculer
$$I = \iint_{\mathcal{D}} x^2y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
où $\mathcal{D}$ est l'intérieur de la boucle de la lemniscate d'équation polaire $r = \sqrt{\cos 2\theta}$ obtenue pour $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$.

Exercice 20 [00090] [Correction]
Calculer
$$\iint_{\mathcal{D}} (x+y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
où $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2-x \leqslant 0, x^2+y^2-y \geqslant 0, y \geqslant 0\right\}$.

Exercice 21 [00095] [Correction]
Calculer
$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^2}$$
où $\mathcal{D}$ est donné par $|x| \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1$.

Exercice 22 [03200] [Correction]
D désigne le demi-disque supérieur de centre $(1,0)$ et de rayon 1. Calculer
$$I = \iint_D \frac{y}{1+x^2+y^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Applications du calcul d'intégrales doubles

Exercice 23 [00093] [Correction]
Soit $R > 0$. On note
$$A_R = [0,R] \times [0,R] \text{ et } B_R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x, y \geqslant 0 \text{ et } x^2+y^2 \leqslant R^2\right\}$$
On pose
$$f(R) = \iint_{A_R} \exp(-(x^2+y^2))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \text{ et } g(R) = \iint_{B_R} \exp(-(x^2+y^2))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
a) Montrer que $g(R) \leqslant f(R) \leqslant g(R\sqrt{2})$.
b) En déduire la valeur de
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$$

Exercice 24 [02546] [Correction]
Soit $C(R)$ le quart de disque $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x^2+y^2 \leqslant R^2$, $R > 0$.

a) Montrer que
$$\left(\int_0^R \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$$
est compris entre
$$\iint_{C(R)} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \text{ et } \iint_{C(R\sqrt{2})} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
b) Calculer
$$\iint_{C(R)} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
c) En déduire la valeur de
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 25 [00097] [Correction]
a) Justifier la convergence de
$$\int_0^{+\infty} \cos(u^2)\,\mathrm{d}u \text{ et } \int_0^{+\infty} \sin(u^2)\,\mathrm{d}u$$
b) Soit $f : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}^{+\star}$ une application continue. Pour $t > 0$ on pose
$$D_t = \{(r\cos\theta, r\sin\theta)/\theta \in [0,\pi/2], r \in [0, tf(\theta)]\}$$
et on introduit
$$\varphi(t) = \iint_{D_t} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \text{ et } \psi(t) = \iint_{D_t} \cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
Déterminer les limites, quand T tend vers $+\infty$ de
$$\frac{1}{T}\int_0^T \varphi \text{ et } \frac{1}{T}\int_0^T \psi$$
c) On choisit f pour que $D_1 = [0,1]^2$. On pose
$$C(t) = \int_0^t \cos(u^2)\,\mathrm{d}u \text{ et } S(t) = \int_0^t \sin(u^2)\,\mathrm{d}u$$
Montrer que $\varphi(t) = 2C(t)S(t)$ et $\psi(t) = C(t)^2 - S(t)^2$.
d) En déduire les valeurs des intégrales de Fresnel
$$\int_0^{+\infty} \cos(u^2)\,\mathrm{d}u \text{ et } \int_0^{+\infty} \sin(u^2)\,\mathrm{d}u$$

Exercice 26 [03515] [Correction]
Calculer
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$
en utilisant l'intégrale double
$$J(u) = \iint_{[0,u]^2} \sin(x)\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Exercice 27 [00091] [Correction]
Soient $1 < a < b$. En calculant de deux manières
$$\int_0^{\pi} \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x - \cos t}\,\mathrm{d}t$$
déterminer
$$\int_0^{\pi} \ln \frac{b - \cos t}{a - \cos t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 28 [00092] [Correction]
Observer que pour tout $x \in [0,1]$,
$$\ln(1+x) = \int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}y}{1+xy}$$
En déduire la valeur de
$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

Formule de Green Riemann

Exercice 29 [03363] [Correction]
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a > 0$, $b > 0$. On note Γ l'ellipse d'équation
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$
et D la partie de $\mathbb{R}^2$ définie par
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leqslant 0$$
a) Calculer l'intégrale double
$$I = \iint_D (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
(on posera $x = ar\cos\theta$ et $y = br\sin\theta$)
b) Calculer l'intégrale curviligne
$$J = \int_\Gamma (y^3\,\mathrm{d}x - x^3\,\mathrm{d}y)$$
c) Quelle relation existe-t-il entre I et$J$?

Exercice 30 [00269] [Correction]
Soit Γ la courbe orientée dans le sens trigonométrique, constituée des deux portions de courbes, comprises entre les points d'intersection, de la droite d'équation $y = x$ et de la parabole d'équation $y = x^2$.
a) Calculer
$$I = \oint_\Gamma (y + xy)\,\mathrm{d}x$$
b) En utilisant la formule de Green-Riemann, retrouver la valeur de cette intégrale.

Exercice 31 [00108] [Correction]
On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$
Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par
$$\varphi(r) = \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$
a) Montrer que la fonction φ est dérivable.
b) Calculer φ' et en déduire une expression φ. On pourra interpréter $r\varphi'(r)$ comme la circulation d'une forme différentielle sur un contour simple.
c) Soit $\mathcal{D}$ le disque de centre 0 et de rayon R. Quelle est la valeur de
$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,?$$

Calcul d'aires

Exercice 32 [00111] [Correction]
Calculer l'aire de la portion bornée du plan délimitée par l'ellipse donnée par

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases} \text{ (avec } a, b > 0)$$

Exercice 33 [00079] [Correction]
Calculer l'aire de la portion bornée du plan délimitée par l'astroïde donnée par

$$\begin{cases} x(t) = a\cos^3 t \\ y(t) = a\sin^3 t \end{cases} \text{ (avec } a > 0)$$

Exercice 34 [00606] [Correction]
Calculer l'aire de la portion bornée du plan délimitée par l'arche de la cycloïde

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$$

obtenue pour $t \in [0, 2\pi]$ et l'axe des abscisses.

Exercice 35 [02462] [Correction]
Calculer l'aire de la portion bornée du plan délimitée par la courbe définie par

$$\begin{cases} x(t) = \cos^2 t \\ y(t) = (1 + \sin t)\cos t \end{cases}$$

Exercice 36 [00112] [Correction]
Calculer l'aire de la portion bornée du plan délimitée par la cardioïde d'équation polaire

$$r = 1 + \cos\theta$$

Exercice 37 [00069] [Correction]
Calculer l'aire de la portion bornée du plan délimitée par la lemniscate d'équation polaire

$$r = \sqrt{\cos 2\theta}$$

Exercice 38 [00062] [Correction]
Calculer l'aire de la boucle de la strophoïde droite d'équation polaire

$$r = \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$$

Exercice 39 [00110] [Correction]
[Inégalité isopérimétrique]
Soit γ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ telle que

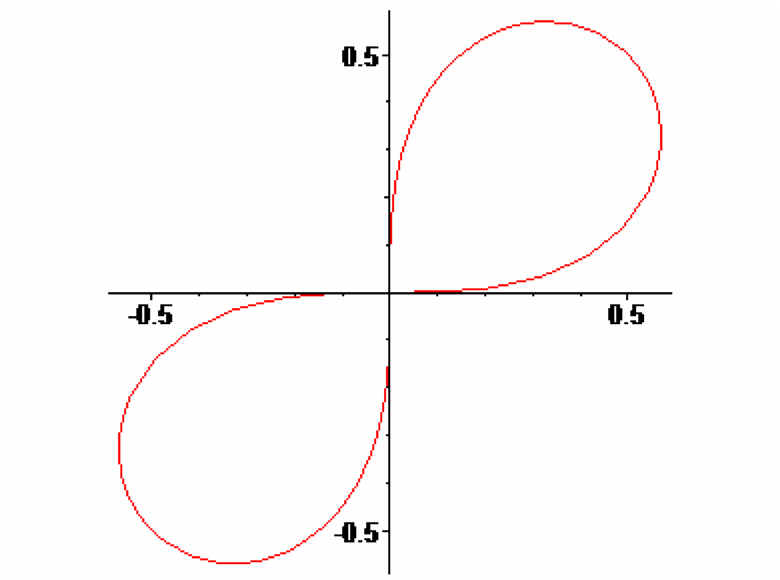
$$\forall s \in \mathbb{R}, |\gamma'(s)| = 1$$

On note S l'aire orientée délimitée par $\gamma_{\restriction[0,2\pi]}$.
a) Exprimer S à l'aide des coefficients de Fourier exponentiels de γ.
b) Montrer $S \leqslant \pi$ et préciser le cas d'égalité.

Exercice 40 [03769] [Correction]
On considère la courbe paramétrée du plan donnée par

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^4} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^4} \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

a) Déterminer centre de symétrie et axe de symétrie. Indice : calculer $x(1/t)$ et $y(1/t)$.
b) Voici l'allure de la courbe sur $\mathbb{R}$.



Calculer l'aire intérieure délimitée par cette courbe.

Intégrales doubles sur un produit d'intervalles

Exercice 41 [02919] [Correction]
Calculer
$$\iint_{[0,+\infty[^2} \frac{y}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Exercice 42 [00098] [Correction]
En calculant de deux façons
$$\iint_{]0,1]^2} x^y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
déterminer la valeur de
$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 43 [00099] [Correction]
En calculant de deux façons
$$\iint_{[0,\pi]\times[0,1[} \frac{1}{1+y\cos x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
déterminer la valeur de
$$\int_0^\pi \frac{\ln(1+\cos t)}{\cos t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 44 [00100] [Correction]
En calculant de deux façons
$$\iint_{[0,+\infty[^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
déterminer la valeur de
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 45 [00101] [Correction]
On pose
$$I = \iint_{]0,+\infty[^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
a) Justifier l'existence de I et établir
$$I = \int_{x=0}^{+\infty} \left(\int_{u=0}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-(1+u^2)x^2}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x$$
b) En déduire la valeur de
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 46 [00102] [Correction]
Que dire de l'intégrale double
$$\iint_D \frac{x-y}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
où $D =]0,1] \times [0,1]$?

Exercice 47 [00250] [Correction]
Calculer
$$\iint_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)}$$
En déduire
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\tan\theta)}{\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 48 [00270] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Calculer
$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-{}^tXAX)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
ou X désigne le vecteur de coordonnées (x,y).

Exercice 49 [03514] [Correction]
Calculer
$$\iint_{]0,1[\times]0,\pi/2[} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+(x\tan y)^2}$$
et en déduire la valeur de l'intégrale
$$\int_0^{\pi/2} \frac{y}{\tan y}\,\mathrm{d}y$$

Exercice 50 [03690] [Correction]
Existence et calcul de
$$I = \iint_{]0,1]^2} \frac{\min(x,y)}{\max(x,y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Exercice 51 [02557] [Correction]
a) Domaine de définition des fonctions
$$B(x,y) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}\,\mathrm{d}u \text{ et de } \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} u^{x-1}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$
b) Montrer que
$$\forall x \in \,]0,+\infty[\,, \Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} u^{2x-1}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$
c) Ecrire $\Gamma(x)\Gamma(y)$ sous forme d'une intégrale double.
d) A l'aide des coordonnées polaires, montrer que
$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$
e) Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$
et en déduire $B(m,n)$ pour $m,n \in \mathbb{N}^\star$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Puisque

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 1-x\right\}$$

on peut calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}x(1-x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{24}$$

Exercice 2 : [énoncé]
On peut décrire $\mathcal{D}$ sous la forme

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\right\}$$

et ainsi exprimer l'intégrale étudiée

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{5/2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{7}$$

Exercice 3 : [énoncé]
$\iint_{\mathcal{D}} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-a}^{a}\int_{y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} 2\frac{b}{a}x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2a^3b\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{a^3b\pi}{4}$.

Exercice 4 : [énoncé]
a) $F(c,0)$ et $F'(-c,0)$ avec $c = \sqrt{a^2-b^2}$.
b) L'intérieur de l'ellipse est la réunion des courbes

$$\mathcal{E}_\lambda : MF + MF' = 2\lambda$$

pour $\lambda \in [c,a]$.
Procédons alors au changement de variable

$$\begin{cases} x = \lambda\cos t \\ y = \sqrt{\lambda^2-c^2}\sin t \end{cases}$$

qui donne l'intérieur de l'ellipse pour (λ,t) parcourant $[c,a]\times[0,2\pi]$.

Le jacobien de ce changement de variable est

$$\frac{D(x,y)}{D(\lambda,t)} = \begin{vmatrix} \cos t & -\lambda\sin t \\ \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-c^2}}\sin t & \sqrt{\lambda^2-c^2}\cos t \end{vmatrix} = \sqrt{\lambda^2-c^2}\cos^2 t + \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2-c^2}}\sin^2 t$$

et on obtient

$$I = \int_c^a \left(\int_0^{2\pi} 2\lambda\sqrt{\lambda^2-c^2}\cos^2 t + \frac{2\lambda^3}{\sqrt{\lambda^2-c^2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\lambda$$

d'où

$$I = 2\pi\int_c^a \lambda\sqrt{\lambda^2-c^2} + \frac{\lambda^3}{\sqrt{\lambda^2-c^2}}\,\mathrm{d}\lambda$$

Après calculs

$$I = \frac{2\pi}{3}(3a^2-b^2)b$$

Exercice 5 : [énoncé]
On peut décrire la partie $\mathcal{D}$ sous la forme

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant x\right\}$$

On peut alors réexprimer l'intégrale double

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}\,\mathrm{d}x$$

et donc

$$I = \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}(\arctan x)^2\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{32}$$

Exercice 6 : [énoncé]
On peut décrire $\mathcal{D}$ sous la forme

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/0 \leqslant x \leqslant \pi \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \pi - x\right\}$$

et ainsi exprimer l'intégrale étudiée

$$I = \int_{x=0}^{\pi}\int_{y=0}^{\pi-x} \sin(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{\pi} \cos(x)+1\,\mathrm{d}x = \pi$$

Exercice 7 : [énoncé]
On peut décrire $\mathcal{D}$ sous la forme

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\right\}$$

et ainsi exprimer l'intégrale étudiée

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} yx^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}x^3 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}$$

Exercice 8 : [énoncé]
$\Phi : (u,\theta) \mapsto (au\cos\theta, bu\sin\theta)$ réalise une bijection de $[0,1]\times[0,\pi/2]$ vers Δ de jacobien : abu.
Par changement de variable

$$\iint_\Delta (x^3 - 2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 (a^3u^3\cos^3\theta - 2bu\sin\theta)abu\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}\theta = \frac{2}{15}ab\left(a^3 - 5b\right)$$

Exercice 9 : [énoncé]

$$|I_n - 1| = \iint_{[0,1]^2} \frac{x^n + y^n}{1 + x^n + y^n}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint_{[0,1]^2} (x^n + y^n)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{2}{n+1} \to 0$$

donc $I_n \to 1$.

Exercice 10 : [énoncé]

$$I = \iiint_D (x+y+z)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^{1-x}\left(\int_{z=0}^{1-x-y}(x+y+z)^2\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$I = \frac{1}{3}\int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^{1-x} 1 - (x+y)^3\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\int_0^1 1 - x^4\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{20}\right) = \frac{1}{10}$$

Exercice 11 : [énoncé]
$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 1 - x\right\}$ donc

$$\iint_D (xy+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x}(xy+1)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

Après calculs

$$\iint_D (xy+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{13}{24}$$

Exercice 12 : [énoncé]
La condition $1 \leqslant xy \leqslant 2$ donne une portion du plan comprise entre deux hyperboles.
Dans le repère $(O;\vec{u}_{\pi/4},\vec{v}_{\pi/4})$, la condition $1 \leqslant x^2 - y^2 \leqslant 4$ devient $1 \leqslant 2XY \leqslant 4$ ce qui conduit encore à une portion de plan comprise entre 2 hyperboles.
Pour $x,y,X,Y > 0$, on obtient

$$\begin{cases} xy = X \\ x^2 - y^2 = Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}X}{\sqrt{\sqrt{Y^2+4X^2} - Y}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{Y^2+4X^2} - Y} \end{cases}$$

Cela permet de justifier que ϕ est une bijection de $]0,+\infty[^2$ vers lui-même.
ϕ est évidemment de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\mathrm{Jac}\phi(x,y) = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = -2(x^2+y^2) \neq 0$$

donc, par le théorème d'inversion globale, ϕ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme. On aurait pu aussi observer que ϕ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ ce qui est immédiat car le système précédent permet d'exprimer ϕ^{-1}.
On a $\phi(D) = [1,2]\times[1,4]$.
Par le changement de variable induit par ϕ,

$$I = \iint_{[1,2]\times[1,4]} \frac{X}{2Y}\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y = \frac{3}{2}\ln 2$$

L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$.
Après résolution du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

on obtient $(0,0)$ seul point critique.
En passant en polaires,

$$f(x,y) = \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} = r^2\tan 2\theta$$

qui change de signe.
f n'a pas d'extremum locaux.

Exercice 13 : [énoncé]
En passant aux coordonnées polaires

$$I = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{R} r\cos(r^2)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\left[\frac{1}{2}\sin r^2\right]_0^R = \pi\sin R^2$$

Exercice 14 : [énoncé]
En coordonnées polaires

$$\iint_{\mathcal{D}} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{\sqrt{\pi}} \rho\sin\rho^2\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = 2\pi$$

Exercice 15 : [énoncé]
En passant aux coordonnées polaires

$$I = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \frac{r^2}{r\cos\theta + r} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{3}\frac{1}{\cos\theta+1}\,\mathrm{d}\theta \underset{t=\tan\theta/2}{=} \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{1}{3}$$

Exercice 16 : [énoncé]
En coordonnées polaires

$$\iint_{\mathcal{D}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\theta=-\pi}^{\pi}\int_{\rho=0}^{1+\cos\theta} \rho^2\cos\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\theta(1+\cos\theta)^3\,\mathrm{d}\theta$$

Sachant

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \pi$$

et

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta - \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{4}$$

on obtient

$$\iint_{\mathcal{D}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{5\pi}{4}$$

Exercice 17 : [énoncé]
On peut décrire $\mathcal{D}$ en coordonnées polaires

$$\mathcal{D} = \{(r\cos\theta, r\sin\theta)/\theta\in[-\pi/2,\pi/2], 0\leqslant r\leqslant\cos\theta\}$$

On a alors

$$\iint_{\mathcal{D}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta} r\cos\theta r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{8}$$

Exercice 18 : [énoncé]
En passant en coordonnées polaires

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r + r^3\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \pi$$

Le résultat se comprend car les aires positives, compensant les négatives, on a

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

Exercice 19 : [énoncé]
En passant en coordonnées polaires

$$I = \int_{\theta=-\pi/4}^{\pi/4}\int_{r=0}^{\sqrt{\cos 2\theta}} r^5\cos^2\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{1}{24}\sin^2 2\theta\cos^3 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{180}$$

Exercice 20 : [énoncé]
On peut décrire le domaine d'intégration en coordonnées polaires sous la forme

$$\mathcal{D} = \{M(r\cos\theta, r\sin\theta)/\theta\in[0,\pi/4]\,/\sin\theta\leqslant r\leqslant\cos\theta\}$$

En passant aux coordonnées polaires

$$\iint_{\mathcal{D}} (x+y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/4}\left(\int_{\sin\theta}^{\cos\theta} r^3(\cos\theta+\sin\theta)^2\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta$$

donc

$$\iint_{\mathcal{D}} (x+y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/4}(\cos^4\theta-\sin^4\theta)(\cos\theta+\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta(1+\sin 2\theta$$

Exercice 21 : [énoncé]
En visualisant le domaine comme le complémentaire de la réunion de deux cercles dans le cercle unité et par des considérations de symétrie, on obtient en passant aux coordonnées polaires

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^2} = 4\int_0^{\pi/2}\left(\int_{\cos\theta}^1 \frac{r}{(1+r^2)^2}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos^2\theta} - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\theta$$

Or via le changement de variable $t = \tan\theta$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos^2\theta} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

donc

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} = \frac{(\sqrt{2}-1)\pi}{2}$$

Exercice 22 : [énoncé]
Le cercle délimitant le disque étudié a pour équation polaire

$$r = 2\cos\theta$$

En passant en coordonnées polaires

$$I = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{2\cos\theta} \frac{r\sin\theta}{1+r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

On obtient

$$I = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin\theta\,[r - \arctan r]_{r=0}^{2\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

donc

$$I = 2\int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta - \int_0^{\pi/2} \sin\theta\arctan(2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

La première intégrale est immédiate et la seconde s'obtient par changement de variable puis intégration par parties

$$I = 1 - \frac{1}{2}\int_0^2 \arctan x\,\mathrm{d}x = 1 - \arctan 2 + \frac{1}{4}\ln 5$$

Exercice 23 : [énoncé]
a) $B_R \subset A_R \subset B_{R\sqrt{2}}$ et la fonction intégrée est continue et positive sur $\mathbb{R}^2$ donc

$$g(R) \leqslant f(R) \leqslant g(R\sqrt{2})$$

b) En passant aux coordonnées polaires

$$g(R) = \int_0^{\pi/2} \int_0^R r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}(1-\mathrm{e}^{-R^2}) \xrightarrow[R\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}$$

Par encadrement, on obtient

$$f(R) \xrightarrow[R\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}$$

Or

$$f(R) = \left(\int_0^R \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 \xrightarrow[R\to+\infty]{} \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$$

et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ donc

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exercice 24 : [énoncé]
a) On a

$$\left(\int_0^R \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 = \left(\int_0^R \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^R \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right) = \iint_{[0,R]^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Or la fonction $(x,y) \mapsto \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ est positive et on a l'inclusion des domaines d'intégration

$$C(R) \subset [0,R]^2 \subset C(R\sqrt{2})$$

On a donc

$$\iint_{C(R)} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \left(\int_0^R \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \iint_{C(R\sqrt{2})} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

b) En passant en coordonnées polaires

$$\iint_{C(R)} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \int_0^R r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-R^2}\right)$$

c) La fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est définie et continue par morceaux sur $[0,+\infty[$. Puisque $\mathrm{e}^{-t^2} = o\left(1/t^2\right)$ quand $t \to +\infty$, on peut affirmer que f est intégrable et il y a donc convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

En passant à la limite quand $R \to +\infty$ l'encadrement obtenu à la première question, on obtient

$$\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

puis
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
sachant l'intégrale positive.

Exercice 25 : [énoncé]
a) Pour $A \in \mathbb{R}^+$
$$\int_0^A \cos(u^2)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \cos(u^2)\,\mathrm{d}u + \int_1^A \cos(u^2)\,\mathrm{d}u$$
Par intégration par parties :
$$\int_1^A \frac{u}{u}\cos(u^2)\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2u}\sin(u^2)\right]_1^A + \frac{1}{2}\int_1^A \frac{\sin(u^2)}{u^2}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[A\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$$
On procède de même pour $\int_0^{+\infty} \sin(u^2)\,\mathrm{d}u$.
b) En passant aux coordonnées polaires
$$\varphi(t) = \iint_{D_t} \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\left(\int_{r=0}^{tf(\theta)} r\sin(r^2)\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta$$
donc
$$\varphi(t) = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(1-\cos(t^2f^2(\theta))\right)\,\mathrm{d}\theta$$
puis
$$\frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{T}\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^T \cos(t^2f^2(\theta))\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\theta$$
Par changement de variable affine, sachant $f(\theta) > 0$, on a
$$\int_0^T \cos(f(\theta)t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{f(\theta)}\int_0^{f(\theta)T} \cos(u^2)\,\mathrm{d}u$$
Or $A \mapsto \int_0^A \cos(u^2)\,\mathrm{d}u$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et admet une limite finie en $+\infty$ donc elle est bornée par un certain M. On a alors
$$\left|\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^T \cos(t^2f^2(\theta))\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \int_0^{\pi/2}\left|\int_0^T \cos(t^2f^2(\theta))\,\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}\theta \leqslant \int_0^{\pi/2}\frac{M}{f(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = C^{te}$$
puis
$$\frac{1}{T}\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^T \cos(t^2f^2(\theta))\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\theta \to 0$$
Finalement
$$\frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t)\,\mathrm{d}t \to \frac{\pi}{4}$$
De manière semblable, on obtient
$$\frac{1}{T}\int_0^T \psi(t)\,\mathrm{d}t \to 0$$
c) On a
$$\varphi(t) = \int_{x=0}^t\left(\int_{y=0}^t \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$
or
$$\sin(x^2+y^2) = \sin(x^2)\cos(y^2) + \sin(y^2)\cos(x^2)$$
En séparant,
$$\varphi(t) = \int_0^t \sin(x^2)\,\mathrm{d}x\int_0^t \cos(y^2)\,\mathrm{d}y + \int_0^t \sin(y^2)\,\mathrm{d}y\int_0^t \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$$
puis
$$\varphi(t) = 2S(t)C(t)$$
De même
$$\psi(t) = C(t)^2 - S(t)^2$$
d) Lorsqu'une fonction $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue tend vers ℓ en $+\infty$ il est connu que
$$\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[T\to+\infty]{} \ell$$
On a donc
$$\varphi(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 2CS \text{ et } \psi(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} C^2 - S^2$$
en notant
$$C = \int_0^{+\infty} \cos(u^2)\,\mathrm{d}u \text{ et } S = \int_0^{+\infty} \sin(u^2)\,\mathrm{d}u$$
On en déduit $C^2 = S^2$ et $2CS = \pi/2$. Il ne reste plus qu'à déterminer les signes de C et S pour conclure leur valeur.
$$\int_0^{+\infty} \cos(u^2)\,\mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n$$

avec

$$I_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \cos(u^2)\,\mathrm{d}u = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\cos s}{2\sqrt{s+n\pi}}\,\mathrm{d}s$$

On a alors $I_n = (-1)^n |I_n|$, $(|I_n|)_{n\geqslant 0}$ décroissante et $I_n \to 0$ donc le critère spécial s'applique et assure que la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} I_n$ est du signe de son premier terme, à savoir $I_0 > 0$. Ainsi $C > 0$. De plus $CS > 0$ donc $S > 0$ puis

$$C = S = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

Exercice 26 : [énoncé]
La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \sin(x)\mathrm{e}^{-xy}$$

est continue donc pour tout $u \geqslant 0$;

$$J(u) = \int_0^u \left(\int_0^u \sin(x)\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^u \left(\int_0^u \sin(x)\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

D'une part

$$\int_0^u \sin(x)\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_0^u \mathrm{e}^{-(y-i)x}\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-(y-i)u}}{y-i}\right)$$

avec

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-(y-i)u}}{y-i}\right) = \frac{1}{y^2+1}\left(1-\cos(u)\mathrm{e}^{-yu} - y\sin(u)\mathrm{e}^{-yu}\right)$$

et d'autre part

$$\int_0^u \sin(x)\mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y = \frac{\sin x}{x}\left(1-\mathrm{e}^{-xu}\right)$$

On en déduit

$$\int_0^u \frac{\sin x}{x}\left(1-\mathrm{e}^{-xu}\right)\mathrm{d}x = \int_0^u \frac{1}{y^2+1}\left(1-\cos(u)\mathrm{e}^{-yu} - y\sin(u)\mathrm{e}^{-yu}\right)\mathrm{d}y$$

ce qui se réorganise en

$$\int_0^u \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^u \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} + \int_0^u \frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{-xu}\,\mathrm{d}x - \int_0^u \frac{\cos(u)+y\sin(u)}{y^2+1}\mathrm{e}^{-yu}\,\mathrm{d}y$$

avec

$$\left|\int_0^u \frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{-xu}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xu}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{u} \xrightarrow[u\to+\infty]{} 0$$

et

$$\left|\int_0^u \frac{\cos(u)+y\sin(u)}{y^2+1}\mathrm{e}^{-yu}\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \int_0^u \frac{y+1}{y^2+1}\mathrm{e}^{-yu}\,\mathrm{d}y \leqslant 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-yu}\,\mathrm{d}y \xrightarrow[u\to+\infty]{} 0$$

On en déduit

$$\lim_{u\to+\infty} \int_0^u \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{u\to+\infty} \int_0^u \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = \frac{\pi}{2}$$

ce qui donne la convergence et la valeur de l'intégrale définissant I.

Exercice 27 : [énoncé]
D'une part

$$\int_0^{\pi}\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-\cos t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \ln\frac{b-\cos t}{a-\cos t}\,\mathrm{d}t$$

D'autre part

$$\int_0^{\pi}\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-\cos t}\,\mathrm{d}t = \int_a^b\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{x-\cos t}\,\mathrm{d}x$$

et

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{x-\cos t} \underset{u=\tan\frac{t}{2}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}u}{(1+x)u^2+x-1} = \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}}$$

On en déduit

$$\int_0^{\pi} \ln\frac{b-\cos t}{a-\cos t}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \pi\left[\mathrm{argch}x\right]_a^b = \pi\ln\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}$$

Exercice 28 : [énoncé]
Par simple détermination de primitive

$$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}y}{1+xy} = \left[\ln(1+xy)\right]_0^1 = \ln(1+x)$$

On a

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)\,\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_0^1\int_0^1 \frac{x}{(1+xy)(1+x^2)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Or

$$\frac{x}{(1+xy)(1+x^2)} = \frac{a}{1+xy} + \frac{bx+c}{1+x^2} \text{ avec } a = -\frac{y}{1+y^2}, b = \frac{1}{1+y^2}, c = \frac{y}{1+y^2}$$

donc

$$I=\int_0^1\int_0^1 \frac{-y}{(1+xy)(1+y^2)}+\frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-I+\int_0^1\int_0^1\frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

puis

$$I=\int_0^1\int_0^1\frac{y}{(1+y^2)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{y}{(1+y^2)}\,\mathrm{d}y\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi\ln 2}{8}$$

Exercice 29 : [énoncé]
a) Le changement de variables proposé a pour jacobien

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=\begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta\\ b\sin\theta & br\cos\theta\end{vmatrix}=abr$$

Ce changement de variable donne

$$I=\int_0^{2\pi}\int_{r=0}^1\left(a^2r^2\cos^2\theta+b^2r^2\sin^2\theta\right)\times|abr|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

et donc

$$I=\frac{\pi ab(a^2+b^2)}{4}$$

b) Par le paramétrage direct

$$\begin{cases} x(t)=a\cos t\\ y(t)=b\sin t\end{cases}\text{avec } t\in[0,2\pi]$$

on obtient

$$J=-\int_0^{2\pi} ab^3\sin^4\theta+a^3b\cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta$$

puis au terme des calculs

$$J=-\frac{3\pi ab(a^2+b^2)}{4}$$

c) On observe

$$J=-3I$$

ce qui est conforme à la formule de Green Riemann puisque

$$y^3\,\mathrm{d}x-x^3\,\mathrm{d}y=P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

avec

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=-3(x^2+y^2)$$

Exercice 30 : [énoncé]
a) En paramétrant les deux courbes constituant Γ

$$I=\int_0^1 x^2+x^3\,\mathrm{d}x-\int_0^1 x+x^2\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}$$

b) Par la formule de Green-Riemann

$$I=-\iint_{\mathcal{D}}(1+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

avec $\mathcal{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\leqslant x\leqslant 1, x^2\leqslant y\leqslant x\right\}$.
On en déduit

$$I=-\int_0^1\left(\int_{x^2}^x(1+x)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=-\int_0^1(1+x)(x-x^2)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}$$

Exercice 31 : [énoncé]
a) $g:(r,t)\mapsto f(r\cos t,r\sin t)$ est $\mathcal{C}^1$ donc g et $\frac{\partial g}{\partial r}$ sont continues sur $\mathbb{R}\times[0,2\pi]$ et φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
b) La fonction $(r,\theta)\mapsto f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ admet une dérivée partielle en la variable r et celle-ci est continue sur $\mathbb{R}\times[0,2\pi]$. Par intégration sur un segment, φ est dérivable et

$$\varphi'(r)=\int_0^{2\pi}\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

En notant Γ le cercle de centre O et de rayon r parcouru dans le sens direct et $\mathcal{D}$ le disque correspondant,

$$r\varphi'(r)=\int_\Gamma\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x=\iint_{\mathcal{D}}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$$

On en déduit $\varphi'(r)=0$ pour $r\neq 0$, puis par continuité pour tout $r\in\mathbb{R}$.
Par suite la fonction φ est constante égale à

$$\varphi(0)=2\pi f(0,0)$$

c) En passant aux coordonnées polaires

$$\iint_{\mathcal{D}}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^R\int_0^{2\pi}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r=\pi R^2 f(0,0)$$

Exercice 32 : [énoncé]
Le domaine limité étant parcouru dans le sens direct, on peut calculer son aire par l'intégrale curviligne

$$\mathcal{A} = \oint x\,\mathrm{d}y$$

On obtient

$$\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} ab\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \pi ab$$

Exercice 33 : [énoncé]
Le domaine limité étant parcouru dans le sens direct, on peut calculer son aire par l'intégrale curviligne

$$\mathcal{A} = \oint x\,\mathrm{d}y$$

On obtient

$$\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} 3a^2\cos^4 t\sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{3\pi}{8}a^2$$

Exercice 34 : [énoncé]
On calcule l'aire étudiée par l'intégrale curviligne

$$\mathcal{A} = \oint x\,\mathrm{d}y$$

le long d'un pourtour direct du domaine limité. Le pourtour est ici formé par la réunion de deux arcs, l'arche de cycloïde (parcouru dans le sens indirect) et un segment de l'axe (Ox). On obtient

$$\mathcal{A} = -\int_0^{2\pi} (t-\sin t)\sin t\,\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} 0\,\mathrm{d}t = 3\pi$$

Exercice 35 : [énoncé]
La courbe étudiée est intégralement obtenue pour $t \in [0, 2\pi]$ et le domaine limité est parcouru dans le sens direct. On peut calculer son aire par l'intégrale curviligne

$$\mathcal{A} = \oint x\,\mathrm{d}y$$

On obtient

$$\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} \cos^4 t - \cos^2 t(1+\sin t)\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 36 : [énoncé]
Le domaine limité étant parcouru dans le sens direct, on peut calculer son aire par l'intégrale curviligne

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\oint r^2\,\mathrm{d}\theta$$

On obtient

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{2}$$

Exercice 37 : [énoncé]
L'aire voulue se calcule par une intégrale curviligne le long d'un pourtour direct du domaine

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\oint r^2\,\mathrm{d}\theta$$

Pour θ variant de $-\pi/4$ à $\pi/4$, on parcourt une boucle de lemniscate dans le sens direct, on obtient par considération de symétrie

$$\mathcal{A} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = 1$$

Exercice 38 : [énoncé]
La boucle de la courbe considérée est obtenue pour $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$ et elle est parcourue dans le sens direct.
L'aire voulue se calcule par l'intégrale curviligne

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\oint r^2\,\mathrm{d}\theta$$

On obtient par considération de symétrie

$$\mathcal{A} = \int_0^{\pi/4} 4\cos^2\theta - 4 + \frac{1}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2 - \frac{\pi}{2}$$

Exercice 39 : [énoncé]
a) Posons $x = \mathrm{Re}(\gamma)$, $y = \mathrm{Im}(\gamma)$.

$$S = \int_\gamma \frac{1}{2}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x(s)y'(s) - y(x)x'(s))\,\mathrm{d}s$$

donc
$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{Im}(\bar{\gamma}(s)\gamma'(s))\,\mathrm{d}s = \pi \mathrm{Im}(\gamma \mid \gamma')$$
en notant $(. \mid .)$ le produit scalaire usuel.
Par la formule polarisée de Parseval
$$(\gamma \mid \gamma') = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{c_n(\gamma)} c_n(\gamma') = \sum_{n\in\mathbb{Z}} in\left|c_n(\gamma)\right|^2$$
car $c_n(\gamma') = inc_n(\gamma)$ et donc
$$S = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n\left|c_n(\gamma)\right|^2$$
b) Par la formule de Parseval on a :
$$\sum_n \left|inc_n\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\gamma'(s)\right|^2\,\mathrm{d}s = 1$$
donc
$$\sum_n n^2\left|c_n\right|^2 = 1$$
puis
$$S = \pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\left|c_n\right|^2 \leqslant \pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2\left|c_n\right|^2 \leqslant \pi$$
avec égalité si, et seulement si, $c_n = 0$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$ tel que $|n| > 1$.
On a alors $\gamma(s) = c_0 + c_1\mathrm{e}^{is}$ avec $|c_1| = 1$ car $|\gamma'(s)| = 1$.
γ est un paramétrage direct d'un cercle de diamètre 1.

Exercice 40 : [énoncé]
a) La courbe est définie pour t parcourant $\mathbb{R}$.
Puisque $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, le point $M(-t)$ est le symétrique du point $M(t)$ par rapport à l'origine.
Pour $t\neq 0$, $x(1/t) = y(t)$ et $y(1/t) = x(t)$ donc $M(1/t)$ est le symétrique du point $M(t)$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.
b) On peut calculer l'aire par une intégrale curviligne « généralisée »(par un changement de paramétrage du type $s = \arctan t$, on se ramène à un paramétrage sur $]-\pi/2,\pi/2[$ que l'on prolonge à $[-\pi/2,\pi/2]$ en adjoignant le point limite origine et cela nous ramène au contexte usuel...). La formule la plus pratique ici est
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\oint x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$$
Pour des raisons de sens de parcours, on va calculer le double de l'aire d'une boucle et l'on obtient
$$\mathcal{A} = \int_0^{+\infty} \frac{2t^3}{(1+t^4)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

Exercice 41 : [énoncé]
Considérons
$$f : (x,y)\mapsto \frac{y}{(1+x^2+y^2)^2}$$
f est définie et continue sur $[0,+\infty[^2$.
Pour $x\geqslant 0$, $y\mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $\frac{y}{(1+x^2+y^2)^2}\sim\frac{1}{y^3}$ quand $y\to+\infty$.
$$\int_0^{+\infty} \frac{y}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y = \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2+y^2}\right]_{y=0}^{+\infty} = \frac{1}{2(1+x^2)}$$
De plus $x\mapsto\int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $\frac{1}{2(1+x^2)}\sim\frac{1}{x^2}$ quand $x\to+\infty$.
$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$$
Puisque f est positive, on en déduit que f est intégrable sur $[0,+\infty[^2$ et par le théorème de Fubini,
$$\iint_{[0,+\infty[^2}\frac{y}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\frac{y}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 42 : [énoncé]
Soit $f(x,y) = x^y$ continue et positive sur $]0,1[^2$.
D'une part
$$\int_{y=0}^1\left(\int_{x=0}^1 x^y\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_{y=0}^1\frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y = \ln 2$$
D'autre part
$$\int_{x=0}^1\left(\int_{y=0}^1 x^y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{x=0}^1\frac{x-1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$$
avec $x\mapsto\frac{x-1}{\ln x}$ intégrable sur $]0,1[$.
Par le théorème de Fubini (avec ici $f\geqslant 0$), ces deux intégrales sont égales et donc
$$\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \ln 2$$

Exercice 43 : [énoncé]
Soit $f(x,y) = \frac{1}{1+y\cos x}$ continue et positive sur $[0,\pi]\times[0,1[$.
D'une part :

$$\int_0^{\pi}\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+y\cos x}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\frac{\ln(1+\cos x)}{\cos x}\,\mathrm{d}x$$

et cette intégrale est bien définie.
D'autre part :

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+y\cos x} \underset{t=\tan\frac{x}{2}}{=} \int_0^{+\infty}\frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+y)+(1-y)t^2} = \frac{\pi}{\sqrt{1-y^2}}$$

et

$$\int_0^1\left(\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+y\cos x}\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{\pi\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\pi^2}{2}$$

Par le théorème de Fubini (avec ici $f\geqslant 0$), ces deux intégrales sont égales et donc

$$\int_0^{\pi}\frac{\ln(1+\cos t)}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{2}$$

Exercice 44 : [énoncé]
Sous réserve d'intégrabilité on a :

$$\int_{x=0}^{+\infty}\left(\int_{y=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\left(\int_{r=0}^{+\infty} r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta$$

D'une part, la fonction $y\mapsto \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et la fonction $x\mapsto\int_{y=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}y = C\mathrm{e}^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
D'autre part, la fonction $r\mapsto r\mathrm{e}^{-r^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et la fonction $\theta\mapsto\int_0^{+\infty} r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r$ est intégrable sur $[0,\pi/2]$.
La relation précédente est donc valide.
D'une part, en séparant les variables :

$$\int_{x=0}^{+\infty}\left(\int_{y=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$$

D'autre part,

$$\int_{\theta=0}^{\pi/2}\left(\int_{r=0}^{+\infty} r\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right]_{r=0}^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$$

On peut conclure

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exercice 45 : [énoncé]
a) Pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, $y\mapsto \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et l'application $x\mapsto\int_{y=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}y = C\mathrm{e}^{-x^2}$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ donc $(x,y)\mapsto \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ est intégrable sur $]0,+\infty[^2$ et

$$I = \int_{x=0}^{+\infty}\left(\int_{y=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

Réalisons le changement de variable $y = ux$

$$\int_{y=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}y = \int_{u=0}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2(1+u^2)}\,\mathrm{d}u$$

puis

$$I = \int_{x=0}^{+\infty}\left(\int_{u=0}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-(1+u^2)x^2}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x$$

b) Compte tenu des calculs précédents $(x,u)\mapsto x\mathrm{e}^{-(1+u^2)x^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[^2$ et donc

$$I = \iint_{]0,+\infty[^2} x\mathrm{e}^{-(1+u^2)x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}u$$

Puisque $x\mapsto x\mathrm{e}^{-(1+u^2)x^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que $u\mapsto\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-(1+u^2)x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{1}{1+u^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ on a aussi

$$I = \int_{u=0}^{+\infty}\left(\int_{x=0}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-(1+u^2)x^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}$$

Or par séparation des variables

$$I = \int_{x=0}^{+\infty}\left(\int_{y=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \left(\int_{t=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$$

donc

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

car cette dernière intégrale est positive.

Exercice 46 : [énoncé]
L'intégrale a la même nature que sur $]0,1]^2$.

$x \mapsto \frac{x-y}{(x+y)^3}$ est intégrable sur $]0,1]$ et

$$\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(1+y)^2}$$

$y \mapsto -\frac{1}{(1+y)^2}$ est intégrable sur $]0,1]$ et

$$\int_0^1 -\frac{\mathrm{d}y}{(1+y)^2} = -\frac{1}{2}$$

Ainsi $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}$.
Par une démarche symétrique

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

On peut donc dire que la fonction $(x,y) \mapsto \frac{x-y}{(x+y)^3}$ n'est pas intégrable sur D.

Exercice 47 : [énoncé]
Posons $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

La fonction f est continue et positive.
Pour $y \in \mathbb{R}^+$, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et
$y \mapsto \int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2(1+y^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
On en déduit que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ et

$$\iint_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)} = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+y^2)} \right) \mathrm{d}y = \frac{\pi^2}{4}$$

Posons $g : \mathbb{R}^+ \times]0,\pi/2[\to \mathbb{R}$ définie par

$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)r = \frac{r}{(1+r^2\cos^2\theta)(1+r^2\sin^2\theta)}$$

La fonction g est continue et positive.
Pour $\theta \in]0,\pi/2[$, la fonction $r \mapsto g(r,\theta)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\int_0^{+\infty} g(r,\theta)\,\mathrm{d}r \underset{u=r^2}{=} \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u\cos^2\theta)(1+u\sin^2\theta)} = -\frac{\ln\tan\theta}{\cos 2\theta}$$

Pour $\theta \neq \pi/4$,

$$\frac{1}{(1+u\cos^2\theta)(1+u\sin^2\theta)} = \frac{1}{\cos 2\theta}\left(\frac{\cos^2\theta}{1+u\cos^2\theta} - \frac{\sin^2\theta}{1+u\sin^2\theta} \right)$$

et on en déduit

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u\cos^2\theta)(1+u\sin^2\theta)} = \frac{1}{\cos 2\theta}\left[\ln \frac{1+u\cos^2\theta}{1+u\sin^2\theta} \right]_0^{+\infty} = -2\frac{\ln\tan\theta}{\cos 2\theta}$$

puis

$$\int_0^{+\infty} g(r,\theta)\,\mathrm{d}r = -\frac{\ln\tan\theta}{\cos 2\theta}$$

De plus, pour $[a,b] \subset]0,\pi/2[$, on a

$$|g(r,\theta)| \leqslant \frac{r}{(1+r^2\cos^2 b)(1+r^2\sin^2 a)} = \varphi(r)$$

avec φ intégrable sur $[0,+\infty[$ donc, par domination sur tout segment, on peut affirmer que $\theta \mapsto \int_0^{+\infty} g(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta$ est continue sur $]0,\pi/2[$. Par cet argument, il n'est pas nécessaire de calculer l'intégrale pour $\theta = \pi/4$.
La fonction $h : \theta \mapsto \int_0^{+\infty} g(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta$ est intégrable sur $]0,\pi/4]$ car quand $\theta \to 0^+$,

$$\sqrt{\theta}h(\theta) = -\frac{\sqrt{\theta}\ln(\tan\theta)}{\cos 2\theta} \sim -\sqrt{\theta}\ln\theta \to 0$$

De plus, $h(\pi/2-\theta) = h(\theta)$ donc h est aussi intégrable sur $[\pi/4,\pi/2[$.
Par le théorème d'intégration en coordonnées polaires, on a alors

$$\iint_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{+\infty} g(r,\theta)\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta$$

d'où l'on tire

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln\tan\theta}{\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta = -\frac{\pi^2}{4}$$

En posant $t = \tan\theta$, on a $\mathrm{d}t = (1+t^2)\,\mathrm{d}\theta$ et

$$\cos 2\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

et on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4}$$

Exercice 48 : [énoncé]
Commençons par le cas où

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu > 0$$

On étudie alors

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-(\lambda x^2 + \mu y^2)\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

Posons $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \exp\left(-(\lambda x^2 + \mu y^2)\right)$$

La fonction f est définie, continue et positive sur $\mathbb{R}^2$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y) \, \mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-\lambda x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mu y^2} \, \mathrm{d}y = C^{te} \mathrm{e}^{-\lambda x^2}$$

La fonction $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x,y) \, \mathrm{d}y$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et par conséquent f est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ avec

$$I = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x^2} \, \mathrm{d}x \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mu y^2} \, \mathrm{d}y \right)$$

Sachant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$$

on obtient par un changement de variable affine

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda\mu}} = \frac{\pi}{\sqrt{\det A}}$$

Passons au cas général.
Notons $\lambda, \mu > 0$ les deux valeurs propres de la matrice A. Il existe une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ telle que si $X = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2$ alors

$${}^tXAX = \lambda u^2 + \mu v^2$$

Considérons alors l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui à (x,y) associe (u,v) de sorte que

$$(x,y) = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2$$

φ est une isométrie de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, la valeur absolue de son jacobien vaut 1 et φ transforme le disque

$$D(0,R) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leqslant R^2\right\}$$

en lui-même. Par le changement de variable $(u,v) = \varphi(x,y)$

$$\iint_{D(0,R)} \exp(-{}^tXAX) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_{D(0,R)} \exp\left(-(\lambda u^2 + \mu v^2)\right) \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

Quand $R \to +\infty$, l'étude d'intégrabilité du cas initial donne

$$\iint_{D(0,R)} \exp\left(-(\lambda u^2 + \mu v^2)\right) \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \to \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-(\lambda u^2 + \mu v^2)\right) \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda\mu}}$$

On en déduit

$$\iint_{D(0,R)} \exp(-{}^tXAX) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \xrightarrow[R \to +\infty]{} \frac{\pi}{\sqrt{\lambda\mu}}$$

Tout pavé $[a,b] \times [c,d]$ étant inclus dans un disque $D(0,R)$ pour R assez grand et inversement tout disque $D(0,R)$ étant inclus dans un pavé assez grand, on peut affirmer que la fonction continue positive $(x,y) \mapsto \exp(-{}^tXAX)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ et

$$I = \sup_{[a,b]\times[c,d] \subset \mathbb{R}^2} \iint_{[a,b]\times[c,d]} \exp(-{}^tXAX) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \lim_{R \to +\infty} \iint_{D(0,R)} \exp(-{}^tXAX) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y =$$

Exercice 49 : [énoncé]
La fonction f définie sur $]0,1[\times]0,\pi/2[$ par

$$f(x,y) = \frac{1}{1 + (x \tan y)^2}$$

est continue et positive.
Pour $x \in]0,1[$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,\pi/2[$ avec

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}y}{1 + (x \tan y)^2} \underset{t = \tan y}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$$

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{\frac{1}{1-x^2}}{1+t^2} + \frac{\frac{x^2}{x^2-1}}{1+x^2t^2}$$

et donc

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}y}{1 + (x \tan y)^2} \underset{t = \tan y}{=} \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{x}{x^2-1} \right) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{x+1}$$

La fonction $x \mapsto \frac{\pi}{2}\ln(x+1)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1[$.
On en déduit que la fonction f est intégrable sur $]0,1[\times]0,\pi/2[$ et

$$\iint_{]0,1[\times]0,\pi/2[} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+(x\tan y)^2} = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}y}{1+(x\tan y)^2}\right)\mathrm{d}x$$

puis finalement

$$\iint_{]0,1[\times[0,\pi/2[} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+(x\tan y)^2} = \int_0^1 \frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \frac{\pi}{2}\ln 2$$

Aussi, pour $y \in]0,\pi/2[$, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1[$ avec

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+(x\tan y)^2} = \left[\frac{1}{\tan y}\arctan\left(x\tan y\right)\right]_0^1 = \frac{y}{\tan y}$$

De plus la fonction $y \mapsto y/\tan y$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,\pi/2[$ donc on aussi

$$\iint_{]0,1[\times]0,\pi/2[} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+(x\tan y)^2} = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+(x\tan y)^2}\right)\mathrm{d}y$$

ce qui donne

$$\iint_{]0,1[\times]0,\pi/2[} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+(x\tan y)^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{y}{\tan y}\,\mathrm{d}y$$

On en déduit

$$\int_0^{\pi/2} \frac{y}{\tan y}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}\ln 2$$

Exercice 50 : [énoncé]
Posons $f :]0,1]^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{\min(x,y)}{\max(x,y)}$$

La fonction f est positive, continue et vérifie

$$\forall (x,y) \in]0,1]^2, f(x,y) \leqslant 1$$

ce qui assure son intégrabilité. L'intégrale étudiée est donc bien définie.

Pour $x \in]0,1]$ fixé, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $]0,1]$ car y est continue par morceaux, positive et majorée par 1. On a

$$\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^x \frac{y}{x}\,\mathrm{d}y + \int_x^1 \frac{x}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}x - x\ln x$$

La fonction $x \mapsto \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$ est intégrable sur $]0,1]$ car y est continue par morceaux et prolongeable par continuité en 0.
On retrouve ainsi que f est intégrable sur $]0,1]^2$ mais aussi a-t-on

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}x - x\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

Exercice 51 : [énoncé]
a) La fonction $b : u \mapsto u^{x-1}(1-u)^{y-1}$ est définie et continue par morceaux sur $]0,1[$. On a

$$u^{x-1}(1-u)^{y-1} \underset{u\to 0^+}{\sim} u^{x-1} \text{ et } u^{x-1}(1-u)^{y-1} \underset{u\to 1^-}{\sim} (1-u)^{u-1}$$

donc la fonction b est intégrable sur $]0,1[$ si, et seulement si, $x > 0$ et $y > 0$.
La fonction b étant positive, son intégrabilité équivaut à la convergence de l'intégrale définissant B. La fonction B est donc définie sur $\mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R}^{+\star}$.
Une étude semblable donne que la fonction Γ est définie sur $]0,+\infty[$ car

$$u^{x-1}\mathrm{e}^{-u} \underset{u\to 0^+}{\sim} u^{x-1} \text{ et } u^{x-1}\mathrm{e}^{-u} \underset{u\to +\infty}{=} o\left(1/u^2\right)$$

b) Le changement de variable $u = t^2$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ strictement monotone donne

$$\Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} t^{2x-1}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

c) On a

$$\frac{1}{4}\Gamma(x)\Gamma(y) = \left(\int_0^{+\infty} u^{2x-1}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right)\left(\int_0^{+\infty} v^{2y-1}\mathrm{e}^{-v^2}\,\mathrm{d}v\right)$$

donc

$$\frac{1}{4}\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} u^{2x-1}v^{2y-1}\mathrm{e}^{-(u^2+v^2)}\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u$$

Considérons la fonction $f : (u,v) \mapsto u^{2x-1}v^{2y-1}\mathrm{e}^{-(u^2+v^2)}$.
Cette fonction est positive.

Pour chaque $u > 0$, la fonction $v \mapsto f(u,v)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$.
La fonction $u \mapsto \int_0^{+\infty} f(u,v)\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}u^{2x-1}\mathrm{e}^{-u^2}\Gamma(y)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$.
On peut donc affirmer que f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+\star}\times\mathbb{R}^{+\star}$ et

$$\iint_{\mathbb{R}^{+\star}\times\mathbb{R}^{+\star}} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(u,v)\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u$$

ce qui fournit exactement

$$\iint_{\mathbb{R}^{+\star}\times\mathbb{R}^{+\star}} u^{2x-1}v^{2y-1}\mathrm{e}^{-(u^2+v^2)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{4}\Gamma(x)\Gamma(y)$$

d) Introduisons la fonction déduite d'un passage en polaire

$$g:(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)r = (\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}r^{2(x+y)-1}\mathrm{e}^{-r^2}$$

La fonction g est positive
Pour chaque $\theta \in]0,\pi/2[$, la fonction $r \mapsto g(r,\theta)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$.
La fonction

$$\theta \mapsto \int_0^{+\infty} g(r,\theta)\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}\Gamma(x+y)$$

est continue par morceaux et intégrable sur $]0,\pi/2[$ car $x,y>0$ et

$$(\sin\theta)^{2y-1} \underset{\theta\to 0}{\sim} \theta^{2y-1},\ (\cos\theta)^{2x-1} \underset{\theta\to\pi/2}{\sim} \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^{2x-1}$$

On peut donc passer en coordonnées polaires et affirmer

$$\iint_{\mathbb{R}^{+\star}\times\mathbb{R}^{+\star}} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{+\infty} g(r,\theta)\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta$$

ce qui donne

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 2\Gamma(x+y)\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}\mathrm{d}\theta$$

Par le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement monotone $u=\cos^2\theta$ pour lequel $\mathrm{d}u = 2\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$ on obtient

$$2\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}\mathrm{d}\theta = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}\,\mathrm{d}u$$

et finalement

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = B(x,y)\Gamma(x+y)$$

e) Par intégration par parties

$$\int_\varepsilon^A u^x\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \left[-u^x\mathrm{e}^{-u}\right]_\varepsilon^A + x\int_\varepsilon^A u^{x-1}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$

Quand $\varepsilon \to 0$ et $A\to+\infty$, on obtient

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Puisque $\Gamma(1)=1$, une récurrence facile donne $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$.
On en déduit

$$B(n,m) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!}$$

ce qui aurait aussi pu se démontrer directement par une succession d'intégrations par parties.